



Die 10. **Lange Nacht** der **Mathematik**

**Mathematik –
mit Abstand am besten**

Ralph Pollandt
Hochschule Karlsruhe – University of Applied Sciences



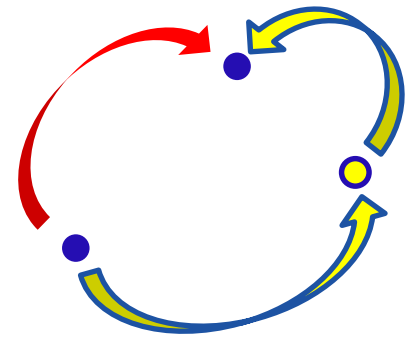
Notwendigkeit einer Abstandsfunktion / Metrik

Sei X eine Menge. Die Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine **Metrik**, wenn für alle x, y, z aus X gilt:

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \text{pos. definit}$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad \text{symmetrisch}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \text{Dreiecksungleichung}$$



Allgemeine Aussagen?

1 Punkte in der Ebene

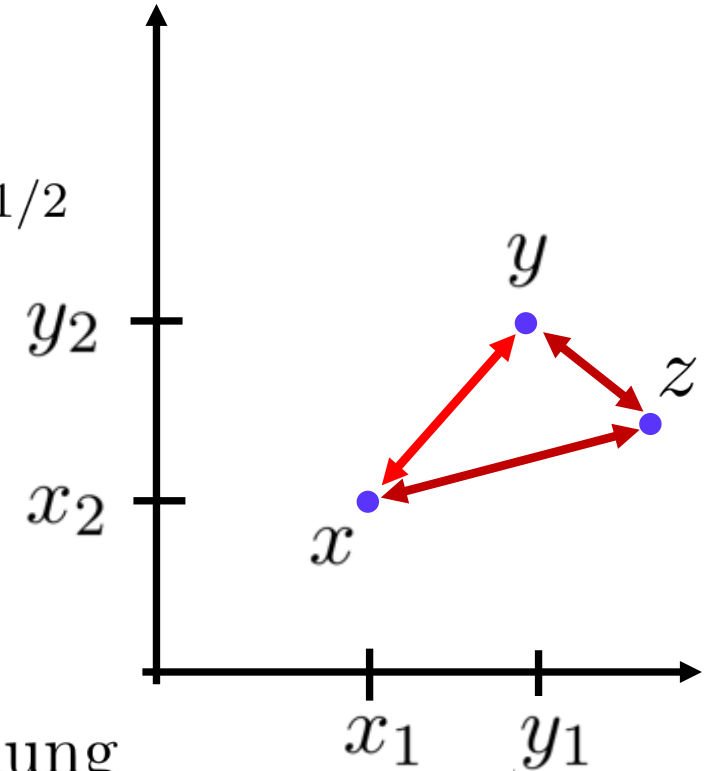


Erste Idee / Metrik:

Euklidischer Abstand: $d_2(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$

Ist das eine Metrik?

$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ pos. definit
 $d(x, y) = d(y, x)$ symmetrisch
 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ Dreiecksungleichung



1 Punkte in der Ebene

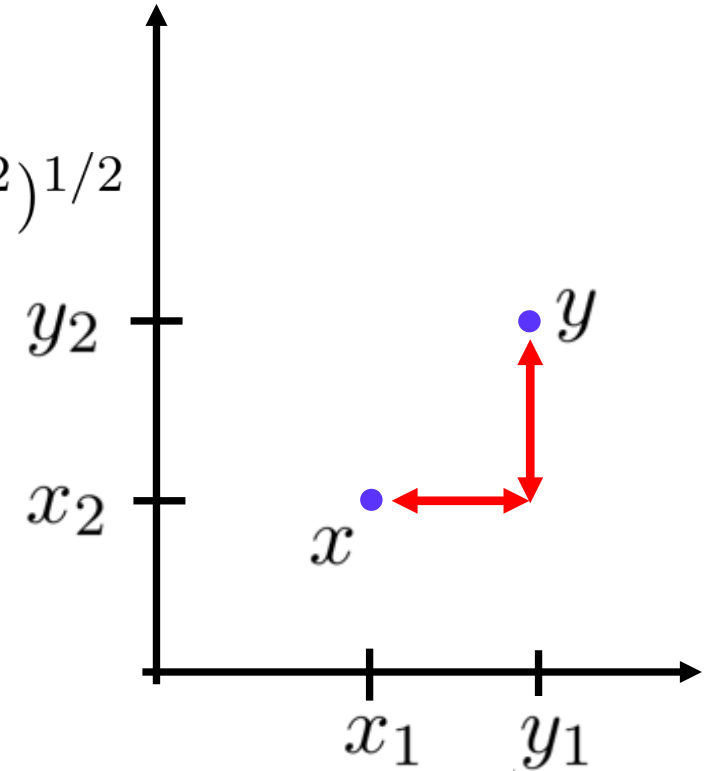


Erste Idee / Metrik:

Euklidischer Abstand: $d_2(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$

Eine Alternative: Zweite Idee / Metrik:

Manhattan-Metrik: $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$



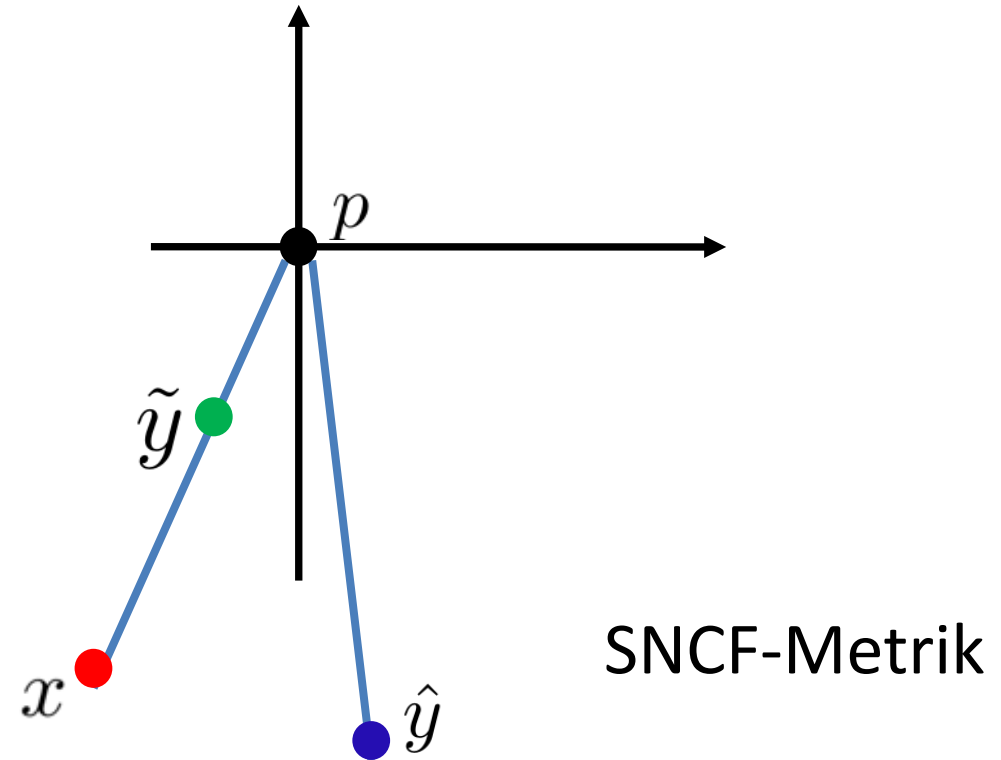
Ist auch $d_1(x, y)$ eine Metrik?

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

1 Punkte in der Ebene



$$d_{SNCF}(x, y) = \begin{cases} d_2(x, y) & x, y, p \text{ kollinear,} \\ d_2(x, p) + d_2(p, y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Metrik?

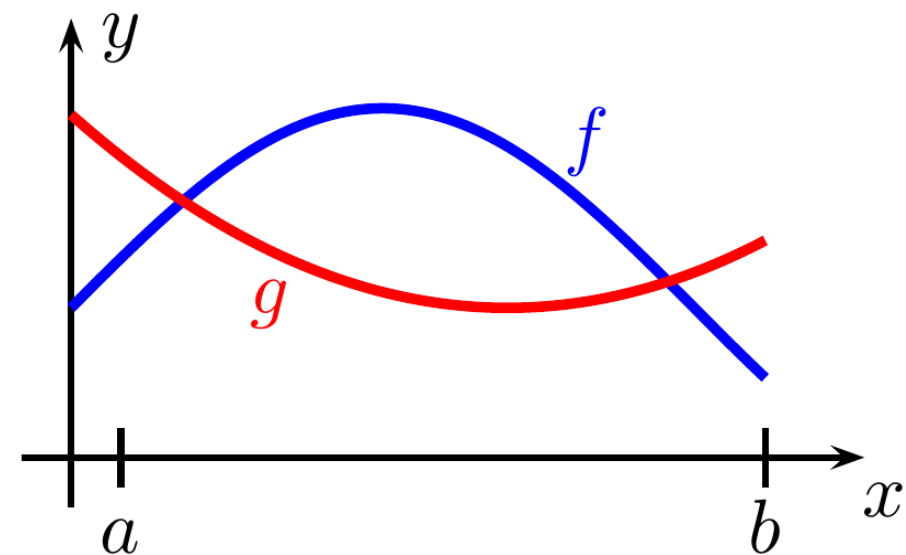
$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$



2 Funktionen

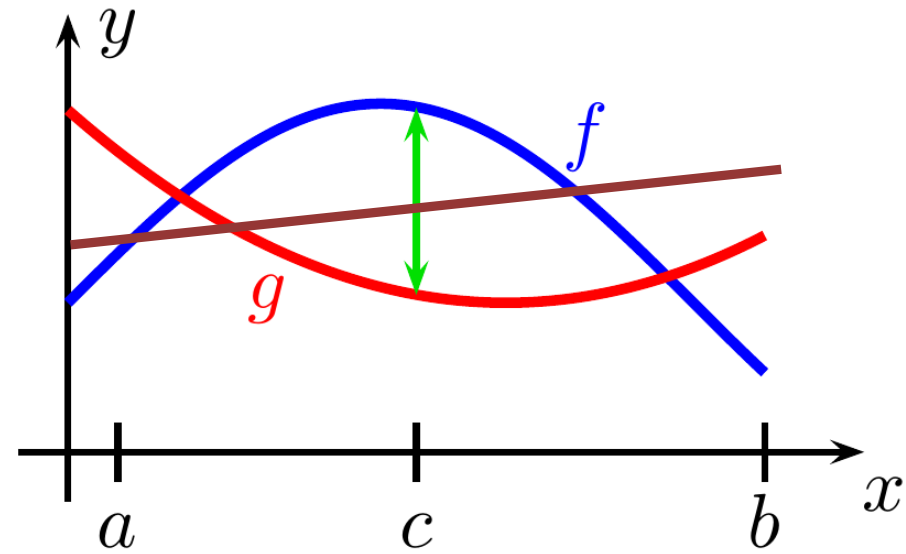


Für auf $[a, b]$ stetige Funktionen f und g ist

$$d_{\infty}(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

eine Metrik.

2 Funktionen



Für auf $[a, b]$ stetige Funktionen f und g ist

$$d_{\infty}(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

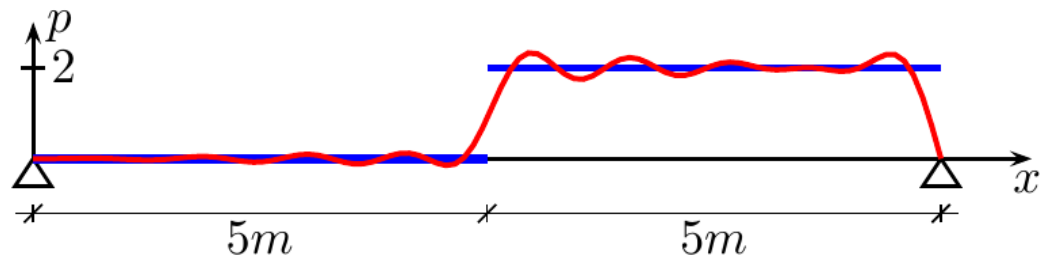
eine Metrik.

Metrik?

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$



Alternative:

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^{10} (f - g)^2 dx}$$



3 Schach – Springer-Metrik



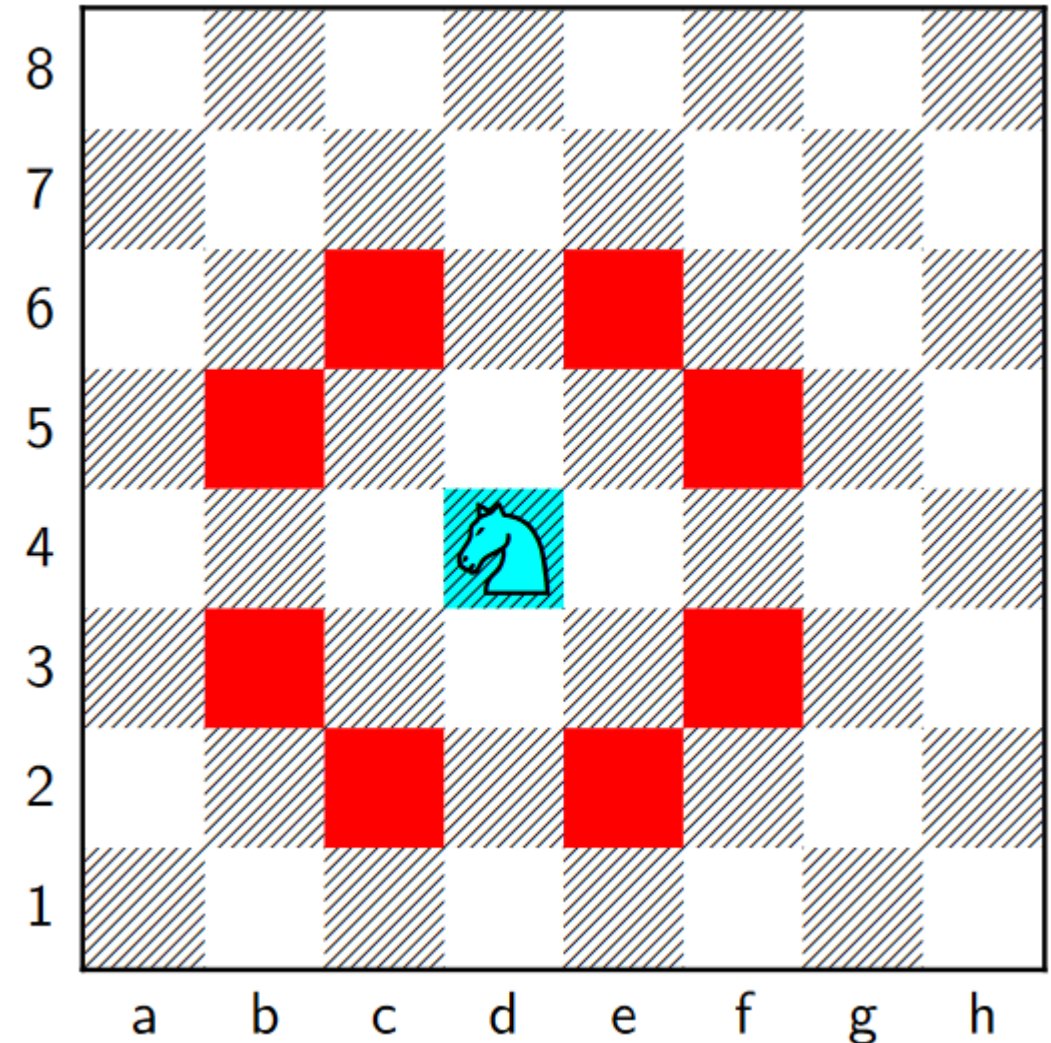
Springer-Metrik: $d_S(A, B) = \text{Anzahl der Springerzüge von Feld A bis Feld B}$

Metrik?

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$



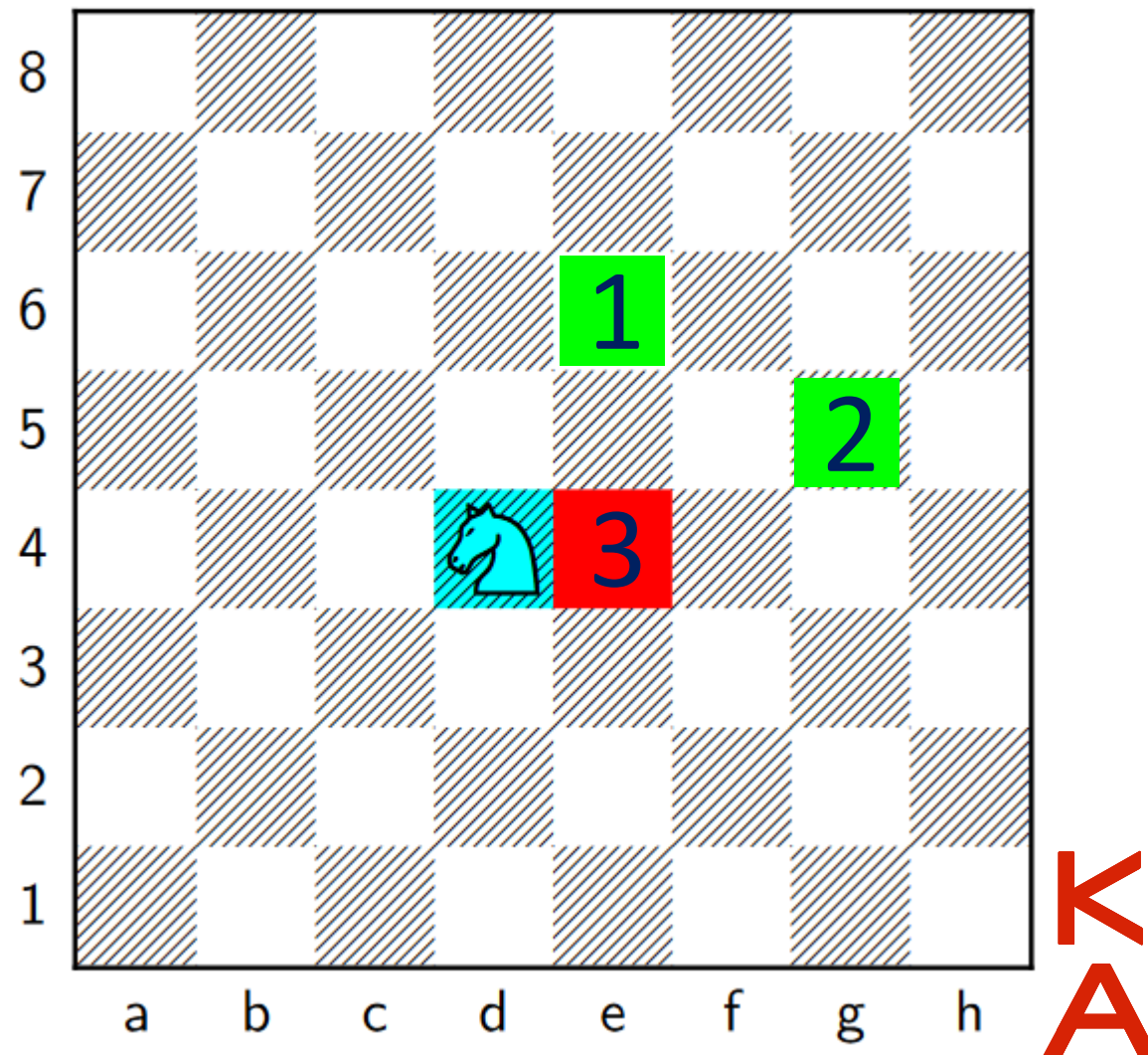
K
A

3 Schach – Springer-Metrik



Springer-Metrik: $d_S(A, B) = \text{Anzahl der Springerzüge von Feld A bis Feld B}$

Beispiel 1: $d_S(d4, e4) = 3$



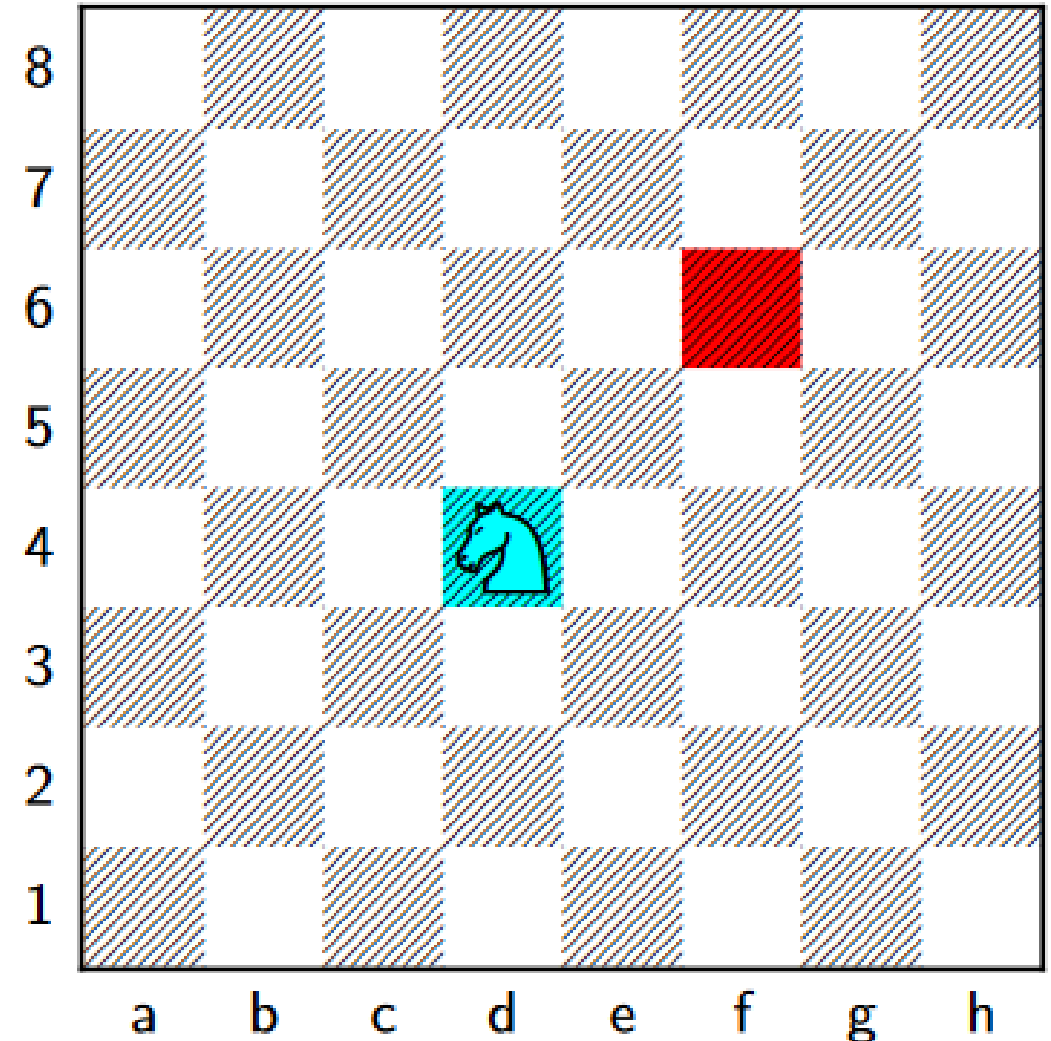
3 Schach – Springer-Metrik



Springer-Metrik: $d_S(A, B) =$ Anzahl der Springerzüge von Feld A bis Feld B

Beispiel 1: $d_S(d4, e4) = 3$

Beispiel 2: $d_S(d4, f6) = 4$



K
A

3 Schach – Springer-Metrik

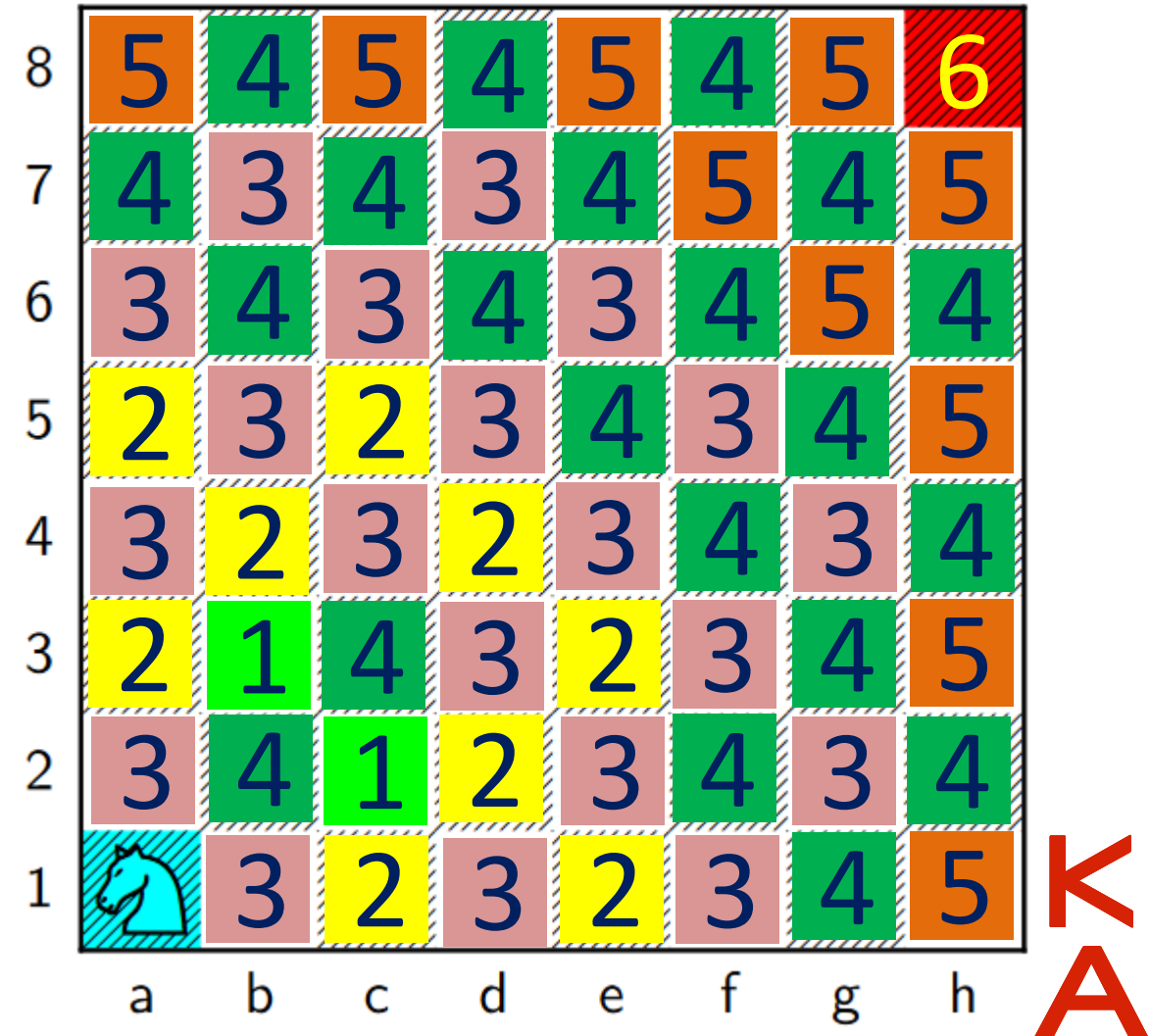


Springer-Metrik: $d_S(A, B) = \text{Anzahl der Springerzüge von Feld A bis Feld B}$

Beispiel 1: $d_S(d4, e4) = 3$

Beispiel 2: $d_S(d4, f6) = 4$

Beispiel 3: $d_S(a1, h8) = 6$



3 Schach – Springer-Metrik




Springer-Metrik: $d_S(A, B) =$ Anzahl der Springerzüge von Feld A bis Feld B

Beispiel 1: $d_S(d4, e4) = 3$

Beispiel 2: $d_S(d4, f6) = 4$

Beispiel 3: $d_S(a1, h8) = 6$

(Rück-)weg finden!

8	5	4	5	4	5	4	5	6
7	4	3	4	3	4	5	4	5
6	3	4	3	4	3	4	5	4
5	2	3	2	3	4	3	4	5
4	3	2	3	2	3	4	3	4
3	2	1	4	3	2	3	4	5
2	3	4	1	2	3	4	3	4
1		3	2	3	2	3	4	5
	a	b	c	d	e	f	g	h

K
A

4 Abstand von Wörtern – die Levenshtein-Distanz



Abstand von Wörtern: Die **Levenshtein-Distanz** zweier Zeichenketten **A** und **B**

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{cases} \text{minimale Anzahl der Operationen} \\ \text{Einfügen / Ersetzen / Löschen} \\ \text{um } \mathbf{A} \text{ in } \mathbf{B} \text{ zu überführen} \end{cases}$$

$$d(\mathbf{Glas}, \mathbf{Tasse}) = 4 : \mathbf{Glas} - \mathbf{Tlas} - \mathbf{Tas} - \mathbf{Tass} - \mathbf{Tasse}$$



4 Abstand von Wörtern – die Levenshtein-Distanz



Abstand von Wörtern: Die **Levenshtein-Distanz** zweier Zeichenketten **A** und **B**

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{cases} \text{minimale Anzahl der Operationen} \\ \text{Einfügen / Ersetzen / Löschen} \\ \text{um } \mathbf{A} \text{ in } \mathbf{B} \text{ zu überführen} \end{cases}$$

Metrik?

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$



4 Abstand von Wörtern – die Levenshtein-Distanz



Mannheim zu Manhattan?

		M	A	N	H	A	T	T	A	N
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
N	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
N	4	3	2	1	1	2	3	4	5	5
H	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
E	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
I	7	6	5	4	3	3	3	4	5	6
M	8	7	6	5	4	4	4	4	5	6



4 Abstand von Wörtern – die Levenshtein-Distanz



Mannheim zu Manhattan?

		M	A	N	H	A	T	T	A	N
0		1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
N	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
N	4	3	2	1	1	2	3	4	5	5
H	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
E	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
I	7	6	5	4	3	3	3	4	5	6
M	8	7	6	5	4	4	4	4	5	6



4 Abstand von Wörtern – die Levenshtein-Distanz



Mannheim zu Manhattan?

		M	A	N	H	A	T	T	A	N
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
N	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
N	4	3	2	1	1	2	3	4	5	5
H	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
E	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
I	7	6	5	4	3	3	3	4	5	6
M	8	7	6	5	4	4	4	4	5	6

KA

4 Abstand von Wörtern – die Levenshtein-Distanz



Mannheim zu Manhattan?

		M	A	N	H	A	T	T	A	N
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
N	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
N	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
H	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
E	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3
I	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2
M	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1

(Rück-)weg finden!

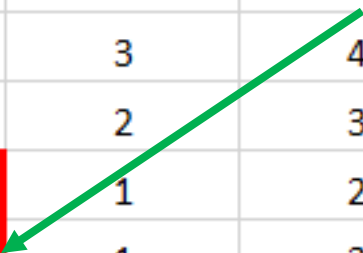


4 Abstand von Wörtern – die Levenshtein-Distanz



Mannheim zu Manhattan?

		M	A	N	H	A	T	T	A	N
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
N	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
N	4	3	2	1	1	2	3	4	5	5
H	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
E	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
I	7	6	5	4	3	3	3	4	5	6
M	8	7	6	5	4	4	4	4	5	6



Mannheim – Manheim – Manhaim – Manhatm – Manhatt – Manhatta – Manhattan



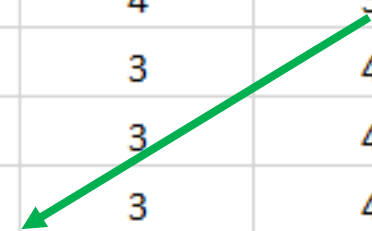
K
A

4 Abstand von Wörtern – die Levenshtein-Distanz



Mannheim zu Manhattan?

		M	A	N	H	A	T	T	A	N
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
N	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
N	4	3	2	1	1	2	3	4	5	5
H	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6
E	6	5	4	3	2	2	3	4	5	6
I	7	6	5	4	3	3	3	4	5	6
M	8	7	6	5	4	4	4	4	5	6



Mannheim – Manheim – Manhaim – Manhatm – Manhatt – Manhatta – Manhattan



K
A

4 Abstand von Wörtern – die Levenshtein-Distanz



The image shows a screenshot of the Microsoft Excel application. The title bar at the top indicates the file name is 'Levenstein.xlsm' and the application is 'Excel'. The ribbon is set to the 'Start' tab, showing various formatting options like font face (Calibri), size (11), bold, italic, underline, and alignment. The spreadsheet grid is visible, with columns labeled A through J and rows 1 through 10. A blue rectangular box is placed over cell A1, containing the text 'Wörter eingeben:' in a bold, black font. The rest of the grid is empty.

